Der Ableitungsbegriff der Analysis im Lichte der Geschichte

versehen mit didaktischen und philosophischen Randglossen

Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Prof. Dr. rer. nat. habil.
Dieter Schott
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de
www.hs-wismar.de

HOCHSCHULE WISMAR
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
TECHNOLOGY, BUSINESS AND DESIGN

Mathematische Begriffe

- Begriffe ohne Anschauung sind leer.
- Anschauung ohne Begriffe ist blind.
- *Immanuel Kant* (1724-1894)

- **Grenzwert** von Funktionen:
- Folgendefinition, ε-δ-Definition (Äquivalenz !?)
- *Limesräume*
- *Nichtstandardanalysis*: (aktual) unendlich kleine Größen
- **Stetigkeit** als Grenzwert
- **Ableitung** als Grenzwert

NEWTON (1643-1727)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\ \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{x}$$ Weg-Zeit-Gesetz

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{o} \cong \boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$ **Fluenden**

$$\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{o} \cong \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$ **Fluxionen** (1666)

$$(\boldsymbol{x} + \dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{o})^{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{o}^{\boldsymbol{k}} \cong 0\ (\boldsymbol{k} = 2, 3, \ldots)$$ vernachlässigbar
klein

Ableitung als **Geschwindigkeit**
(der Änderung)

Knorriger Typ
CAMBRIDGE
Physik, Mathematik
Alchemie
Theologie

LEIBNIZ (1646-1716)

$$\sum \rightarrow \int, \quad \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Universalgelehrter

lange in Hannover

arm, enttäuscht verst.

Leibniz-Uni ab 2006

Summation → Integration

Differentiale d*x*: extrem kleine Größen

Differentialquotient als Kurvenanstieg

Prioritätsstreit

- ***Leibniz*** kannte einige Arbeiten von Newton, der aber seine Methode geheim hielt. Leibniz wählte etwa 10 Jahre später einen anderen unabhängigen Zugang und entwickelte seinen Differentialkalkül. Er veröffentlichte seine Ergebnisse. Allerdings wurden ***Newtons*** **Arbeiten** dabei **nicht zitiert**!
- Beim Streit, den vor allem Anhänger beider Seiten austrugen, ging es nicht nur um die Personen, sondern auch um Traditionen und Nationen!
- **1712** Parteiische Untersuchungskommission der Royal Society mit Plagiatsvorwurf

Die Kraft der Symbolik

- Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Bezeichnungen Entdeckungen erleichtern. In wundervoller Weise kann man so die Arbeit des Geistes reduzieren.

- *Gottfried Wilhelm Leibniz*

Verallgemeinerung mit analoger Symbolik

$$a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$$

Lineare Gleichung

$$x = \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$$

$$\begin{array}{lllll} a_{11} \cdot x_1 + & \ldots & + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & = & \ldots \\ a_{m1} x_1 + & \ldots & + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

Kompakte Schreibweise

$$m = n,\ \det(A) \neq 0: \quad x = A^{-1} \cdot b$$

$$\text{sonst}: \quad x = A^{-} \cdot b$$

Ableitung als (lokaler) Anstieg (einer Kurve)

$$f : D \subseteq R \mapsto R$$

$$x \in D,\ x_* \in D,\ x_*\ \mathrm{HP}(D)$$

$$a := \lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}, \quad h := x - x_*$$

Schreibweisen:

$$y = f(x)$$

$$a = f\,'(x_*) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_*) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_*)$$

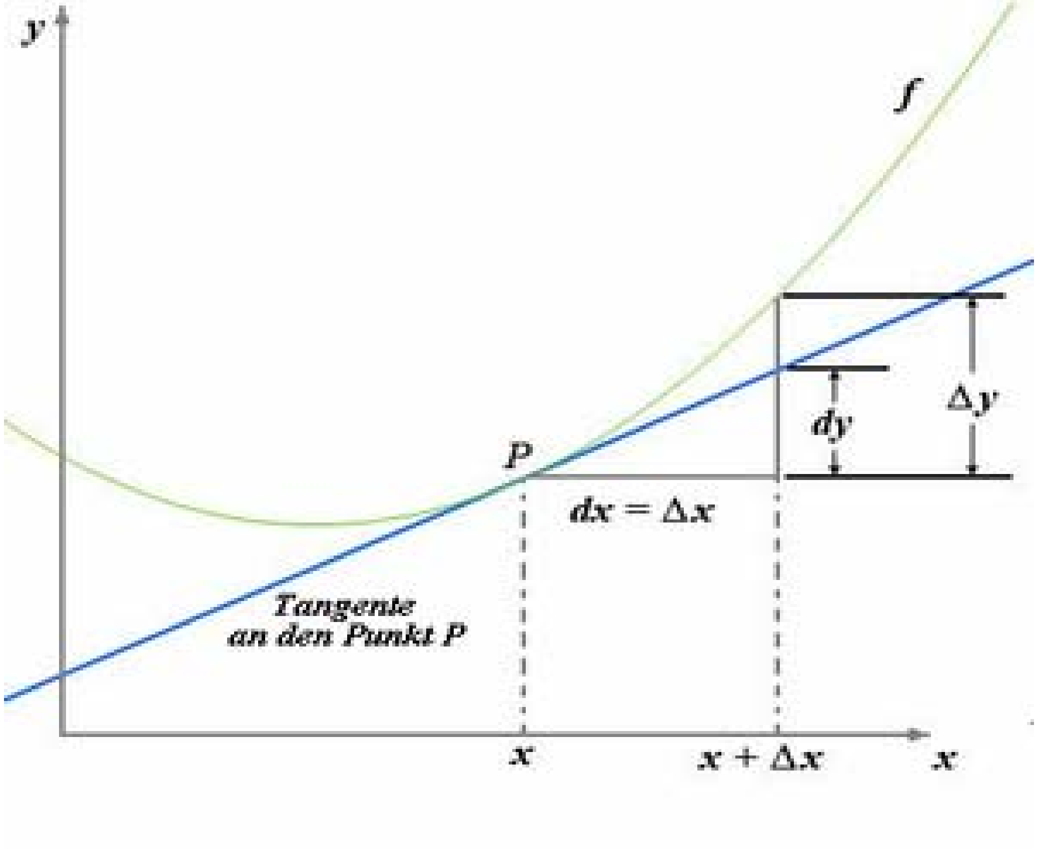
Skalare Funktion

Explizite Definition
Existenz
Eindeutigkeit
Zulassung von $\pm\infty$

Interpretationen:
Tangentenanstieg (Zahl)
Geschwindigkeit
Änderungsrate
Gradient

LAGRANGE, *LEIBNIZ* (Differentialquotient)

Geometrische Deutung



Differentiale

$$\mathrm{d}y = f'(x_*) \cdot \mathrm{d}x$$

$$f'(x_*) \in \mathbb{R} : L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

dx Eingang, dy Ausgang (Größen)

Konstante (Zahl), lineare Abb.

$$\Delta y = f(x) - f(x_*)$$

$$\Delta x = \mathrm{d}x = x - x_* = h$$

dx kann beliebig (groß) sein

$$y = f(x) = f(x_*) + \Delta y$$

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y \quad \text{für} \quad \Delta x \quad \text{klein}$$

$$y = l(x) = f'(x_*) \cdot (x - x_*) + f(x_*)$$

$$= f(x_*) + \mathrm{d}y$$

Lineare Fortsetzung von f:
Tangente(ngleichung)
Lokale Näherung für f

f' (numerische) Kondition → Fehler- , Störungsrechnung

Einseitige Ableitungen und Subgradienten

$$a_{\pm} = f'(x_* \pm 0) := \lim_{x \to x_* \pm 0} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

Funktionen mit „Ecken“
nichtglatte Funktionen
konvexe Funktionen

$$a \in R : \forall x \in R \;\; f(x) \geq f(x_*) + a \cdot (x - x_*)$$

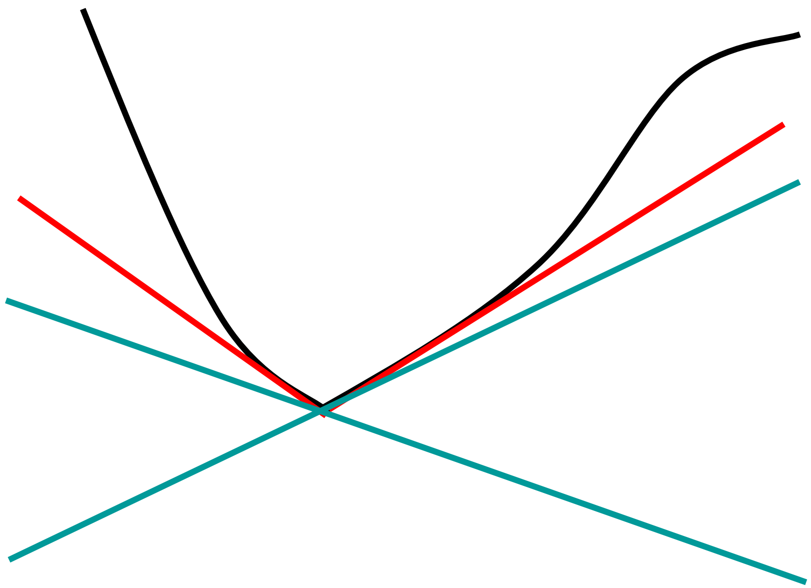
$$a \in \partial f(x_*) = I, \quad a_{\pm} \in \partial f(x_*)$$

$$y = y_{ST} = f(x_*) + a \cdot (x - x_*)$$

a **Subgradienten**,
Elemente des
Subdifferentials,
Anstiege der
Subtangenten

Implizite Definition

Lokal konvexe Funktionen



Anstiege: einseitige Ableitungen

Subtangenten
Anstiege: Subgradienten

Ableitungen als Funktionen

$$x_* \to x$$

$$D(f') \subseteq D(f)$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y(x, \mathrm{d}x),\ \mathrm{d}y(x, 1) = f'(x)$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = (f')'(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$$

Konstante → Variable

Ableitung: Funktion (Operator)

Differentiation: Prozess

Ableitung f': Prozess und Resultat

Ableitungswerte $f'(x)$

Höhere Ableitungen
Differentialkalkül (Formalismus)

Bsp. für: f beliebig oft bzw.
f nirgends differenzierbar

Gebrochene Ableitungen

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\cdot\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

Grünwald-Letnikov

$$f^{(p)}(x_*) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(x_* - rh)$$

$0 < p \leq n$, *linksseitige* Differenzenquotienten

$$f^{(p)}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \left(\mathrm{j}\cdot u\right)^p \left(\mathcal{F} f\right)(u) \right\}(x)$$

Fourier-Transformation

$$x^{(0{,}5)} = x^{0{,}5} = \sqrt{x}$$

Vermutung von *Leibniz*

Die Kraft der Verallgemeinerung

- Ich möchte … darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, dass jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen, …

- *Hilbert* (Vortrag in Paris im Jahre 1900)

Vorsicht Verallgemeinerung!

- Suggestive Ideen der Verallgemeinerung sind oft fruchtbar und denkökonomisch sehr nützlich. Sie müssen aber mathematisch präzise untermauert werden, um fehlerhafte Anwendungen auszuschließen.
- Das wollen oder können Ingenieure (Naturwissenschaftler, Anwender) nicht immer nachvollziehen.
- Eine **Zusammenarbeit** und Auseinandersetzung in verschiedenen Fachgruppen (in Lehre und Forschung) ist daher anzustreben.
- **Achtung**: Äquivalente Begriffe (bzw. Definitionen) können bei der Verallgemeinerung „auseinanderfallen“!

Verallgemeinerung der reellen Funktionen

- **Analysis** (endlichdimensionale Vektorräume)
- Komplexwertige Funktionen $w = f(x)$
- Komplexe Funktionen $w = f(z)$
- Vektorstellige Funktionen $y = f(\mathbf{x})$
- Vektorwertige Funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$
- Vektorfunktionen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
- **Distributionen** (verallgemeinerte Funktionen)

- **Funktionalanalysis** (abstrakte Räume, Funktionenräume)
- Funktionale $y = f(x)$
- Operatoren $y = F(x)$
- Abbildungen $y \varepsilon F(x)$

Komplexwertige und komplexe Funktionen

$$w = f(x) = a(x) + b(x) \cdot \mathrm{j}$$

$$f'(x) = a'(x) + b'(x) \cdot \mathrm{j}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot x} \Rightarrow f'(x) = \mathrm{j} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot x}$$

$$w = f(z) = f(x + y\,\mathrm{j}) = u(x, y) + v(x, y) \cdot \mathrm{j}$$

$$f'(z_*) = \lim_{z \to z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}$$

$$f(z) = \mathrm{e}^{z} \Rightarrow f'(z) = \mathrm{e}^{z}$$

$$\mathrm{d}w = f'(z_*) \cdot \mathrm{d}z$$

Komplexe Größen → Reelle Größen

Division durch komplexe Zahlen ungleich 0 ist definiert!

Vektorwertige Funktionen

$$\boldsymbol{f}: D \subseteq \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}^m,\ x_* \in D,\ x_* \in \mathrm{HP}(D)$$

$$\boldsymbol{f}'(x_*) = \lim_{x \to x_*} \frac{1}{x - x_*} \cdot \left[\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(x_*)\right]$$

Kurve

Ableitung Richtungsvektor!

Skalar mal Vektor definiert!

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{f}'(x_*)$$

$$\boldsymbol{f}'(x_*) \in \boldsymbol{R}^m : L(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^m)$$

$$\boldsymbol{l}(x) = \boldsymbol{f}(x_*) + (x - x_*) \cdot \boldsymbol{f}'(x_*)$$

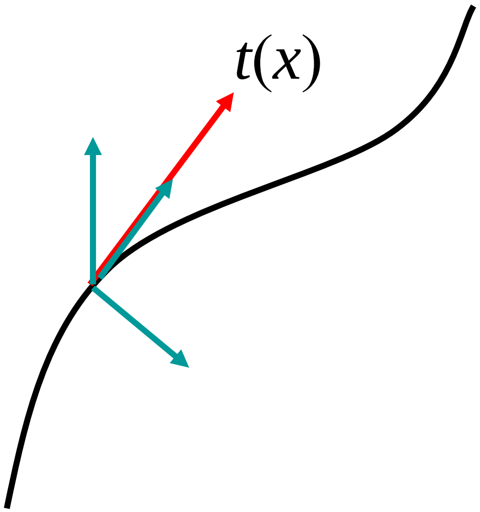
Differentiale

Ableitung lineare Abb.

Tangente

affin-lineare Abbildung

Raumkurven und Tangentenvektoren



Tangentenvektor $t(x)$

Tangenteneinheitsvektor

Normaleneinheitsvektor

Lokales Dreibein

Formalismus

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

Koordinatenweise Ableitung

Vektorstellige Funktionen

$$f : D \subseteq R^n \mapsto R$$

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

$$f_i(x_i) := f(x_{1*}, \ldots, x_i, \ldots, x_{n*})$$

$$a_i = \lim_{x_i \to x_{i*}} \frac{f_i(x_i) - f_i(x_{i*})}{x_i - x_{i*}} = f_i{}'(x_{i*})$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Partielle Ableitung:

gewöhnliche Ableitung nach

x_i für $x_j = x_{j*}$ $(j \neq i)$ fest

Tangentenanstieg in x_*
in Richtung von x_i

Schreibweisen:

$$a_i = f_{x_i}(x_*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_*)$$

$$\partial_{x_i} y = a_i \cdot \partial x_i$$

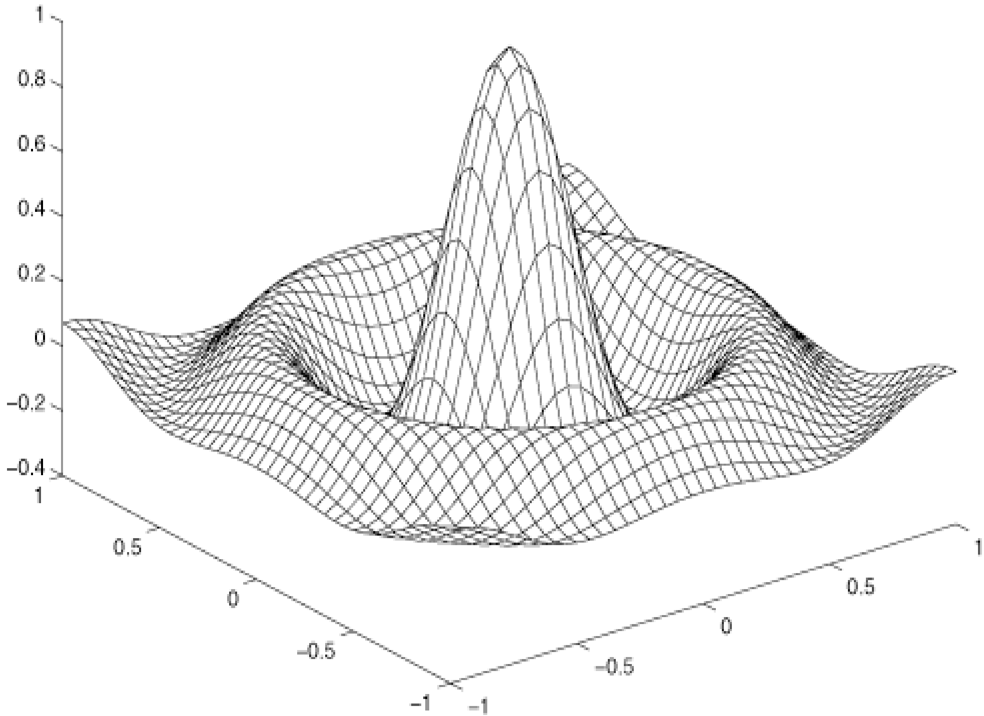
$$y = l(x_i) = a_i \cdot (x_i - x_{i*}) + f(x_*)$$

$$x_j = x_{j*} \; (j \neq i)$$

Part. Differential

Part. Tangente

Raumflächen



Achsenparallele Schnitte: Schnittkurven, Tangenten

Partielle Ableitungen als Funktionen

$$f_{x_i}$$

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

$$f_{x_i x_j x_k} = f_{x_j x_k x_i} = \dots$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung bei glatten Funktionen

Formalismus des Differentialkalküls (gilt unter schwachen Voraussetzungen)

Richtungsableitungen

$$g(\lambda) = f(x_* + \lambda e), |e| = 1$$

$$a_e = \lim_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} = g'(0)$$

$$a_e =: f_e(x_*)$$

$$e = e_i \Rightarrow a_e = a_i = f_{x_i}(x_*)$$

Skalare Funktion

Anstieg in Richtung von e

Partielle Ableitungen:

spezielle Richtungsableitungen

Totale (starke) Ableitung

$$\lim_{x \to x_*} \left| \frac{f(x) - f(x_*) - a \cdot (x - x_*)}{x - x_*} \right| = 0$$

a Zahl

$$\lim_{x \to x_*} \frac{|f(x) - f(x_*) - a \cdot (x - x_*)|}{|x - x_*|} = 0$$

a Zeilenvektor

(totale) **Ableitung**

$$\lim_{x \to x_*} \frac{|f(x) - f(x_*) - \langle a, x - x_* \rangle|}{|x - x_*|} = 0$$

a Spaltenvektor

Gradient

Schreibweisen

$$a = f'(x_*)$$

$$a = \nabla f(x_*)$$

Totales Differential, Tangentialhyperebene

$$y = f(x)$$

$$\mathrm{d}y = f'(x_*) \cdot \mathrm{d}x = \langle \nabla f(x_*), \mathrm{d}x \rangle$$

Differential

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y \text{ für } \mathrm{d}x \text{, d.h. } |\mathrm{d}x| \text{, klein}$$

$$f'(x_*) : L(R^n, R)$$

$$y = l(x) = f'(x_*) \cdot (x - x_*) + f(x_*)$$

Tangentialhyperebene
(affiner Teilraum)

Formalismus

$$f'(\boldsymbol{x}) = \left(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n} \right)$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x})^T$$

$$f_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e} = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e} \rangle$$

$$\mathrm{d}y = f_{x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \ldots + f_{x_n} \cdot \mathrm{d}x_n$$

Ableitung: Vektor der partiellen Ableitungen

Richtungsableitung: Länge der Projektion der Ableitung auf die Richtung $\boldsymbol{e}$ (Betrag 1)

Differential: Summe der partiellen Differentiale

Totale Ableitung existiert g.d.w. Richtungsableitung existiert bezüglich aller Richtungen.

Schwache Ableitung

$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_*)$$ für alle Richtungen $\boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{a}$ schwache Ableitung von f

Starke Ableitung = Schwache Ableitung
(auf allgemeinerer Stufe ungleich)

Zweite totale Ableitung

$$f' \cong \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdot & \cdot & f_{x_1 x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{x_n x_1} & \cdot & \cdot & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} = A = A^T \cong f''$$

Hesse-**Matrix**:

Symmetrische Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$A = f''(x_*) : L(R^n, L(R^n, R)) : A(x^1, x^2) = y$$

$$\mathrm{d}^2 y = < f''(x_*) \cdot \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2 > = (\mathrm{d}x^2)^T \cdot f''(x_*) \cdot \mathrm{d}x^1$$

Bilinearform

***n*-te Ableitung**: *Multilinearform* (MATLAB: Feld)

Vektorfunktionen

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_*} \frac{\left| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*) - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*) \right|}{\left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_* \right|} = 0$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*) + \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_*)$$

$$\boldsymbol{A} =: \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_*) \in \boldsymbol{R}^{m,n}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*)(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_*) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*)$$

Implizite Definition der totalen **Ableitung**:

Matrix (lineare Abb.)

Aber: Matrix ungleich Abb.

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} := \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$\mathrm{A} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*) \cong \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_*)$$

Tangentialraum ist
ein affiner Teilraum

Formulierungen

- Laxe Sprechweisen und präzise, aber oft schwerfällige Formulierungen gehören verschiedenen Ebenen an, für den Experten kein Problem, für den Laien oft verwirrend. Das **Prinzip der didaktischen Vereinfachung** ist hier geschickt zu handhaben, um Verwirrungen und Missverständnisse zu vermeiden.

Sprechweisen

- **Funktion** $f = f(.)$ bzw. $y = f(x)$, $f' = f'(.)$ bzw. $f'(x)$
- ! Funktion, Funktionswerte, Wertepaare (Graph)
- **Matrix** A vermittelt lineare Abbildung $y = A\,x$
- ! Matrix entspricht lineare Abbildung
- **Ableitung** $f'(x)$ generiert Differentiale
- $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}f(x)(.) = f'(x)$
- ! Ableitung $f'(x)$ entspricht Differential $\mathrm{d}f(x)$)

Formalismus

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1\,'(\boldsymbol{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m\,'(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{1,x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdot & \cdot & f_{1,x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m,x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdot & \cdot & f_{m,x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Jacobi-
Matrix

Ableitung von Distributionen

$$\boldsymbol{T}: \boldsymbol{C}_0^{\infty}(\Omega) \mapsto \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{T}'(\varphi) := -\boldsymbol{T}(\varphi')$$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \to -\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \varphi'(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

linear, stetig

Einbettung von Funktionen

Ableitung von Distributionen → Ableitung von Funktionen

Gebrochene Ableitungen über *Fourier*-Transformation

Banachräume

- X, Y Banachräume (linear, normiert, vollständig), Hilberträume
- *F*: X → Y Operator (Abbildung)
- Betrag → Norm
- Matrix → lineare (stetige) Abbildung
- (Erste) Ableitung aus L(X,Y), zweite Ableitung aus L(X,L(X,Y)), was als Bilinearform deutbar ist
- Richtungsableitung (auch Ableitung längs Kurven in X)
- Starke Ableitung (*FRECHET*)
- Schwache Ableitung (*GATEAUX*)
- Subdifferentiale, falls Y geordneter Banachraum

Abstrakte Form von Subdifferentialen

$$A \in Y : \forall x \in X \; F(x) \geq F(x_*) + A(x - x_*)$$

$$Y = R(C)$$

$$F(x) \geq F(x_*) + < a, x - x_* >$$

$$a \in H$$

$$a \in X^* = L(X, R)$$

F Funktional

Dualer Raum